

# 解析大衍筮法的起卦概率

——易卦解构的一个应用

孙 滌

*Dee Bruce Sun, Ph.D., Professor Emeritus, College of Business Administration  
California State University-- Long Beach  
Los Angeles, CA 90045, USA  
[brucesunchina@gmail.com](mailto:brucesunchina@gmail.com), +1 562-5696924*

易有聖人之道四焉，以言者尚其辭，以動者尚其變，以制器者尚其象，以卜筮者尚其占。 —— 易經·繫辭上

六爻之動，三極之道也。是故君子所居而安者，易之序也。所樂而玩者，爻之辭也。是故君子居則觀其象而玩其辭，動則觀其變而玩其占 —— 易經·繫辭上

夫易之數，由逆而成矣 —— 邵雍

知所謂卦爻象象之義，而不知卦爻象象之用，非易也 —— 朱熹

諸經皆可理釋，惟易必由數推 —— 英和

## 摘要

本文对易学的一个基本问题——如何起卦做了解析，修正了前人对大衍筮法的诠释，并提出了新的算法，从而得到了全部易卦的筮占概率分布。

易经的六十四個卦象成型於商朝，通行於周朝，是易學的根基。卦象符號（六十四個六爻重卦並八個三爻單卦）是一個嚴整的體系，經傳的任何詮釋，以及各家的哲理衍義都需要圍繞著這套卦象圖符來展開。易经為群經之首，由易卦展露的“天意”是華夏文明的各種詮釋汲取信念和觀念的源頭；作為占筮之書，易卦默示的“天啓”又是炎黃子裔探求運命做風險抉擇的依憑。無論哪類運用，先祖（伏羲）的智慧都是通過卦象來曉諭人類的。

如何獲取“我”的卦——以求得上天來指引自己所問之事，需要經過貞問—占卦—解卦三個階段得到實現。禱問正當的情事取決於個人的誠篤，解釋卦象的奧義得益於群體的學說，而中間階段，占卦則須依賴大衍筮法——周易里求得“我的卦象”的唯一途徑<sup>1</sup>。（大致上可算是個“技術活”。）

大衍筮法實質上是一個隨機數發生器，筮儀描述了占卦的隨機過程，得到的四個筮數代表著四象（為二爻結構）：六代表老陰☷、七代表少陽☱、八代表少陰☶、九代表老陽☰。得到六、七、八、九的隨機概率分別為十六分之 1、十六分之 5、十六分之 7 和十六分之 3。

（這個概率分布和坊間通常用的簡化方法“搖錢筮法”相去甚遠。）由此推算出整個易卦體系的概率分布，對於考察和計算易卦之間的聯繫及演變，有重大的意義。（見**附錄二**）

作者同時深入分析了邵雍的“加一倍法”，並結合萊布尼茨所開創的二進制算法，認為邵雍-萊布尼茨排序是對易卦整體排序的一大推進，並且提出了修正的看法。

## 关键词

大衍筮法 著占概率分布 加一倍法 二進制卦序

---

<sup>1</sup> 左傳》、《國語》中記載的二十多則先秦筮案均為大衍筮案。近代如易學大家尚秉和先生的《筮案輯存》，記述的數十則案例無一不是大衍筮案。

## 1 邵康节的“加一倍法”

北宋的易学大家邵雍在易卦整体结构有开创性的贡献，深入探究所达到的高度超越了前贤。他所揭示的“伏羲先天六十四卦圆方图”是一座巅峰，后人鲜能企及。康节先生为易卦排序所遵循的方法，即“加一倍法”是个伟大的创造。可是对于加一倍法内在的机理和逻辑，迄今尚需一致和妥切的解说。

比邵雍略晚的大儒程颢算是慧眼独具，曾评述道，“尧夫之数，只是加一倍法。以此知《太玄》都不济事，”认为“加一倍法”要比扬雄的太玄数更高卓。邵雍听了程颢这番“识货”的话，竟惊抚其背说：“大哥，你恁聪明！”<sup>2</sup>

“加一倍法”更深层次的奥义，前代却鲜有述及者。邵雍在其伏羲先天图里替六十四个易卦排定的次序时所用的“加一倍法”，在数理逻辑上其实相当直白。我们有必要先弄明白，邵雍的“加一倍法”，真实含义不是简单地乘二加倍，而是二次方。邵雍排序的依据是给易卦的各个爻位加权，以现代的计数符号——阴爻--为0、阳爻—为1，从初爻（第一爻）、二爻、三爻、四爻、五爻，直至上爻（第六爻），逐个爻位加倍，权重分别为1、2、4、8、16、32，再加总起来即可得到卦的排序号。一百多年后的朱熹，颇能理解“加一倍法”的道理，因而称其为“加一位法”。如此推断，“加一倍法”和二进制数值算法在对各卦的“身份认定”上是异曲同工的，即 $1=2^0$ 、 $2=2^1$ 、 $4=2^2$ 、 $8=2^3$ 、 $16=2^4$ 、 $32=2^5$ 。

在附录一里，有人类思想史上的一个著名片段的回顾。似可为佐证，说明从观念和方法上更新认知，并引进新的解析工具，对于易学的研究探索和现代诠释有着非比寻常的意义。

把握“加一倍法”的真意，尤其要在应用上避免偏误，还得从解读“大衍筮法”谈起。由大衍筮法筮得到四个数：六（6）、八（8）、七（7）、九（9），分别代表着二爻结构的四象。其中6和8分别代表四象的老阴--和少阴--，而9和7分别代表四象的老阳—和少阳—。--和--同属阴仪，—和—则同属阳仪。

---

<sup>2</sup> “康节之学，虽作用不同，而其实伏羲所画之卦也，明道所谓加一倍法也。”——蔡元定

## 2 大衍筮法的占卦概率

大衍筮法又称揲蓍法、蓍占，或直接称作周易占法，是载入周易原文的唯一筮法。历朝历代的易学家们口授心传的依据，是《易传·系辞》里的一段话，“大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扚以象闰，五岁再闰故再扚而后挂。（原文见“大衍之数五十”章及原注）。<sup>3</sup>

在附录二里，作者对大衍筮法的筮仪过程做了细致的解析，并得到了大衍筮法得到四个筮数代表四象的随机概率分布，请参阅。

大衍筮法其实是一种四象筮法，得到的四个（随机）筮数，六（6）、八（8）、七（7）、九（9）的四个数分别代表着四象的老阴☷、少阴☶、少阳☱和老阳☰。☷和☶同属阴仪，☱和☰则同属阳仪。同属阴仪的6为可变而8为不可变；同属阳仪，9为可变而7为不可变。所谓“可变”，有待变之意，阴阳转换——6待变为7而9待变为8。

就其实质言，大衍筮法的过程是一个“随机数发生器”。问题在于，得到6、7、8、9这四个筮数的随机概率分别是多少呢？我们经过附录二的分析，推导得出结论：得到6（六）的随机概率是1/16，得到8（八）的概率为7/16；得到9（九）为3/16，而得到7（七）的概率则是5/16。<sup>4</sup>（图1）

四象	老陰	少陰	少陽	老陽
卦象	☷	☶	☱	☰
	可變陰爻	不可變陰爻	不可變陽爻	可變陽爻
二进制数值编码	00	01	10	11
十进制排序	0	1	2	3
大衍筮法筮数	六	八	七	九
随机概率 (1/16)	1	7	5	3

（图1）

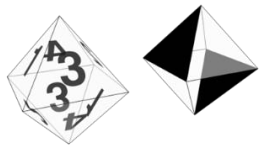
<sup>3</sup> 《易传·系辞》“大衍之数五十”章：“大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扚以象闰，五岁再闰故再扚而后挂。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十。凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。乾之策二百一十有六，坤之策百四十有四，凡三百有六十，当期之日。二篇之策万有一千五百二十，当万物之数也。是故四营而成易，十有八变而成卦，八卦而小成，引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣”。

<sup>4</sup> “大衍之数，其算法之原乎！是以算数之起，不过乎方圆曲直也。乘数，生数也；除数，消数也。算法虽多，不出乎此矣。”——邵雍

得到四象的随机概率相当不均衡，但占得阴阳两仪的机会各半（8/16），是均等的。阴阳守恒乃易经的一个核心理念，贯穿着易学的整体诠释，而不仅限于象数派的视角。

不过，要做出一个简单的随机数发生器来精确模拟“大衍筮法”的成卦概率，却有点复杂。由于世界上不存在正十六面体，我们无从设计出一个简单的“骰子”来随机地获得1/16、3/16、5/16和7/16的概率。作者建议的办法，是通过抛掷两枚正八面体的骰子来实现这样的概率分布。

为此作者设计出并制作了一对正八面体的“骰子”，来完成大衍筮法生成随机数的功能。（图2）骰子1的八个面里，有两个相偶的一对面是黑色的，其余三对六面为白色，即黑面的概率为1/4而白面为3/4。骰子2的四对相偶的面各标为1、2、3、4，即每个数字的概率均为1/4。



(图2)

抛掷这样一对骰子三次，分别代表“三极之道”的地（初爻、二爻）、人（三爻、四爻）和天（五爻、上爻），便构成了一个六爻易卦。如此占得的易卦能够精准符合大衍筮法的成卦随机概率。以此联系易经、易传文辞的种种诠释，其所传递的“天意”方能没有偏误和歧义。

方法如下：

抛掷这样一对骰子，观察朝上的那一面。先看骰子2的情况，如果是2时，得筮数8（八），若是3时得筮数7（七），不用管骰子1的黑白如何。当骰子2朝上的那个面为1的话，那么骰子1为黑时，得筮数6（六）、骰子1为白时则得筮数8；如果骰子2朝上的面为4时，那么骰子1为黑时得筮数7、为白则得筮数9（九）。列表如图3。

		1/4	1/4	1/4	1/4
	1	2	3	4	
1/4	黑	6	8	7	7
3/4	白	8	8	7	9
		8	8	7	9
		8	8	7	9

黑1	六	1/16
白1+x2	八	7/16
x3+黑4	七	5/16
白4	九	3/16

(图3)

### 3 大衍筮法占得易卦的概率列表

我们试举例说明之。

- A. 第一次抛掷，得白 1，筮数为 8，是四象中的☱；为地道的初爻、二爻；  
第二次抛掷，得黑 3，筮数为 7，是四象中的☷；为人道的三爻、四爻；  
第三次抛掷，得白 4，筮数为 9，是四象中的☳；为天道的五爻、上爻。

于是得到的易卦为天上雷下的无妄卦（周易排序 25），它的筮数编号则为 978。  
其成卦概率为三个筮数概率的乘积： $7/16 * 5/16 * 3/16 = 4096$  分之  $105 = 2.5635\%$ 。

这里的 4096 是 16 的三次方（或等于 2 的 12 次方）。也就是说，占得一个易卦共 4096 种可能性里，有 105 次导致无妄卦的构成。

- B. 第一次抛掷，得白 3，筮数为 7，是四象中的☱；为地道的初爻、二爻  
第二次抛掷，得白 1，筮数为 8，是四象中的☱；为人道的三爻、四爻；  
第三次抛掷，得黑 3，筮数为 7，是四象中的☷；为天道的五爻、上爻。

所占得的卦为山上风下的蛊卦（周易排序 18），其筮数编号则为 787。蛊卦的成卦概率为 7、8、7 三个筮数概率的乘积： $5/16 * 7/16 * 5/16 = 4096$  分之  $175 = 4.2725\%$ 。

换言之，在占得易卦的 4096 种可能性里面有 175 次导致蛊卦的构成。

如此等等，下面的图表列出了从大衍筮法占得各易卦的随机概率。图 4 是按占得卦的概率从小到大来排列的，图 5 则是依照周易的原卦序来排列成的。表列的数据展现出许多有趣的型态，值得做深入的探究发掘。

譬如，64 个易卦的占得概率仅为 20 种。其中，由 6 个概率相同的卦构成的组有 4 个；由 3 个概率相同的卦构成的组有 12 个；而概率独立、仅有一个卦自成一组的则有 4 个。这是因为骰子的三次抛掷是彼此独立的，即与抛掷的先后次序无关，对于占得的易卦概率的影响有相等的权重。因此根据排列组合的法则，三个筮数全不重复的而成卦概率相同的是 6 卦组，共 4 种；三个筮数中有两个重复，成卦概率相同的 3 卦组共有 12 种；而三个筮数皆同的卦只有 4 个，分别自成一种概率组。

饶有趣味的是，“三极之道”即三个筮数皆为 6（☱）的卦是最难占得的坤卦，筮数编码为 666，概率只有 0.0244%（1/4096）。三个筮数皆为 9（☳）的是乾卦，概率为 0.6592%（27/4096），是坤卦的 27 倍。占得的三个筮数皆为 7（☱）的未济卦，概率要大许多，是

3.0518% (125/4096)，即坤卦的 125 倍。而占得三个筮数皆为 8 (☷)，筮数编码 888 的既济卦，其占得的随机概率在全部易卦中是最高的，8.3740% (343/4096)，多达坤卦的 343 倍！

请注意，乾卦 1 和坤卦 2，是周易起首的一对卦；未济 63 和既济 64 则是周易垫底一对卦。至于周易何以如此排序的理由，大衍筮法的占卦概率或许给出了默示，是可供我们继续深入究问的线索。

筮数编码	卦象及用爻卦序	天运	人运	地运	三极之道	成卦概率
666	2 坤	1	1	1	1	0.0244%
669	19 临	1	1	3	3	0.0732%
696	62 小过	1	3	1	3	0.0732%
966	20 观	3	1	1	3	0.0732%
667	7 师	1	1	5	5	0.1221%
676	16 豫	1	5	1	5	0.1221%
766	23 剥	5	1	1	5	0.1221%
668	24 复	1	1	7	7	0.1709%
686	15 谦	1	7	1	7	0.1709%
866	8 比	7	1	1	7	0.1709%
699	34 大壮	1	3	3	9	0.2197%
969	61 中孚	3	1	3	9	0.2197%
996	33 遁	3	3	1	9	0.2197%
679	54 归妹	1	5	3	15	0.3662%
697	32 恒	1	3	5	15	0.3662%
769	41 损	5	1	3	15	0.3662%
796	56 旅	5	3	1	15	0.3662%
967	59 涣	3	1	5	15	0.3662%
976	12 否	3	5	1	15	0.3662%
689	11 泰	1	7	3	21	0.5127%
698	55 丰	1	3	7	21	0.5127%
869	60 节	7	1	3	21	0.5127%
896	31 咸	7	3	1	21	0.5127%
968	42 益	3	1	7	21	0.5127%
986	53 渐	3	7	1	21	0.5127%
677	40 解	1	5	5	25	0.6104%
767	4 蒙	5	1	5	25	0.6104%
776	35 晋	5	5	1	25	0.6104%
999	1 乾	3	3	3	27	0.6592%
678	51 夬	1	5	7	35	0.8545%
687	46 升	1	7	5	35	0.8545%
768	27 颐	5	1	7	35	0.8545%
786	52 艮	5	7	1	35	0.8545%
867	29 坎	7	1	5	35	0.8545%
876	45 萃	7	5	1	35	0.8545%
799	14 大有	5	3	3	45	1.0986%
979	10 履	3	5	3	45	1.0986%
997	44 姤	3	3	5	45	1.0986%
688	36 明夷	1	7	7	49	1.1963%
868	3 屯	7	1	7	49	1.1963%
886	39 蹇	7	7	1	49	1.1963%
899	43 夬	7	3	3	63	1.5381%
989	9 小畜	3	7	3	63	1.5381%
998	13 同人	3	3	7	63	1.5381%
779	38 睽	5	5	3	75	1.8311%
797	50 鼎	5	3	5	75	1.8311%
977	6 讼	3	5	5	75	1.8311%
789	26 大畜	5	7	3	105	2.5635%
798	30 高	5	3	7	105	2.5635%
879	58 兑	7	5	3	105	2.5635%
897	28 大过	7	3	5	105	2.5635%
978	25 无妄	3	5	7	105	2.5635%
987	57 巽	3	7	5	105	2.5635%
777	64 未济	5	5	5	125	3.0518%
889	5 需	7	7	3	147	3.5889%
898	49 革	7	3	7	147	3.5889%
988	37 家人	3	7	7	147	3.5889%
778	21 噬嗑	5	5	7	175	4.2725%
787	18 蛊	5	7	5	175	4.2725%
877	47 困	7	5	5	175	4.2725%
788	22 贲	5	7	7	245	5.9814%
878	17 随	7	5	7	245	5.9814%
887	48 井	7	7	5	245	5.9814%
888	63 既济	7	7	7	343	8.3740%
						100.00%

(图 4)

筮数编码	卦象及用爻卦序	天运	人运	地运	三极之道	成卦概率
1	999 1 乾	3	3	3	27	0.6592%
2	666 2 坤	1	1	1	1	0.0244%
3	868 3 屯	7	1	7	49	1.1963%
4	767 4 蒙	5	1	5	25	0.6104%
5	889 5 需	7	7	3	147	3.5889%
6	977 6 讼	3	5	5	75	1.8311%
7	667 7 师	1	1	5	5	0.1221%
8	866 8 比	7	1	1	7	0.1709%
9	989 9 小畜	3	7	3	63	1.5381%
10	979 10 履	3	5	3	45	1.0986%
11	689 11 泰	1	7	3	21	0.5127%
12	976 12 否	3	5	1	15	0.3662%
13	998 13 同人	3	3	7	63	1.5381%
14	799 14 大有	5	3	3	45	1.0986%
15	686 15 谦	1	7	1	7	0.1709%
16	676 16 豫	1	5	1	5	0.1221%
17	878 17 随	7	5	7	245	5.9814%
18	787 18 蛊	5	7	5	175	4.2725%
19	669 19 临	1	1	3	3	0.0732%
20	966 20 观	3	1	1	3	0.0732%
21	778 21 噬嗑	5	5	7	175	4.2725%
22	788 22 贲	5	7	7	245	5.9814%
23	766 23 剥	5	1	1	5	0.1221%
24	668 24 复	1	1	7	7	0.1709%
25	978 25 无妄	3	5	7	105	2.5635%
26	789 26 大畜	5	7	3	105	2.5635%
27	768 27 颐	5	1	7	35	0.8545%
28	897 28 大过	7	3	5	105	2.5635%
29	867 29 坎	7	1	5	35	0.8545%
30	798 30 高	5	3	7	105	2.5635%
31	896 31 咸	7	3	1	21	0.5127%
32	697 32 恒	1	3	5	15	0.3662%
33	996 33 遁	3	3	1	9	0.2197%
34	699 34 大壮	1	3	3	9	0.2197%
35	776 35 晋	5	5	1	25	0.6104%
36	688 36 明夷	1	7	7	49	1.1963%
37	988 37 家人	3	7	7	147	3.5889%
38	779 38 睽	5	5	3	75	1.8311%
39	886 39 蹇	7	7	1	49	1.1963%
40	677 40 解	1	5	5	25	0.6104%
41	769 41 损	5	1	3	15	0.3662%
42	968 42 益	3	1	7	21	0.5127%
43	899 43 夬	7	3	3	63	1.5381%
44	997 44 姤	3	3	5	45	1.0986%
45	876 45 萃	7	5	1	35	0.8545%
46	687 46 升	1	7	5	35	0.8545%
47	877 47 困	7	5	5	175	4.2725%
48	887 48 井	7	7	5	245	5.9814%
49	898 49 革	7	3	7	147	3.5889%
50	797 50 鼎	5	3	5	75	1.8311%
51	678 51 夬	1	5	7	35	0.8545%
52	786 52 艮	5	7	1	35	0.8545%
53	986 53 渐	3	7	1	21	0.5127%
54	679 54 归妹	1	5	3	15	0.3662%
55	698 55 丰	1	3	7	21	0.5127%
56	796 56 旅	5	3	1	15	0.3662%
57	987 57 巽	3	7	5	105	2.5635%
58	879 58 兑	7	5	3	105	2.5635%
59	967 59 涣	3	1	5	15	0.3662%
60	869 60 节	7	1	3	21	0.5127%
61	969 61 中孚	3	1	3	9	0.2197%
62	696 62 小过	1	3	1	3	0.0732%
63	888 63 既济	7	7	7	343	8.3740%
64	777 64 未济	5	5	5	125	3.0518%
						100.000%

(图 5)

## 附录一 “加一倍法”和二进制算法

如所周知，二进制的运算法则是由德意志的大科学家莱布尼茨首创的<sup>5</sup>。他的这项伟大贡献在十七、八世纪由于技术条件限制，并没有他与牛顿分别独自研发的微积分那样迅速得到应用广泛，而是两百余年后方显露其里程碑的意义。莱布尼茨的二进制算法，同布尔代数、香农的逻辑电路和信息理论、以及冯·诺依曼的计算机范式一起，被公认为是数值计算机理论和技术的最重要的源头之一。

莱布尼茨在 1703 年看到了在中国传教的耶稣会士法国人白晋寄送给他的邵雍的“伏羲六十四卦圆方图”，顿时就明白，图中易卦排序的“加一倍法”和他在专研的二进制算法是高度契合的。白晋是当时有数的洋人汉学大师，他向莱布尼茨介绍了《周易》和八卦的系统。莱布尼茨认为阴、阳基本上就是他毕生在探究的二进制的汉文明版本，并尝试用二进制算法替八卦（三爻）和六十四个易卦作了“身份认定”，从而迅即排出了全部卦序的编号。

莱布尼茨专研和制定二进制算术的努力开始于 1670 年代，他的创新探索以论文正式发表则于 1703 年，而且终其一生在不断推进不断改善。莱布尼茨和白晋<sup>6</sup> 在易经探索上有过长期的交流（1697-1707）。他们之间有许多书信往返，现在保存在德国的图书馆（图林根的图书馆和汉诺威的莱氏档案文献馆）里至少有十五封。莱布尼茨怀着高度热忱，研读了白晋从北京邮寄给他的易经的《先天图》（由邵雍率先披露出来、托名伏羲的《伏羲六十

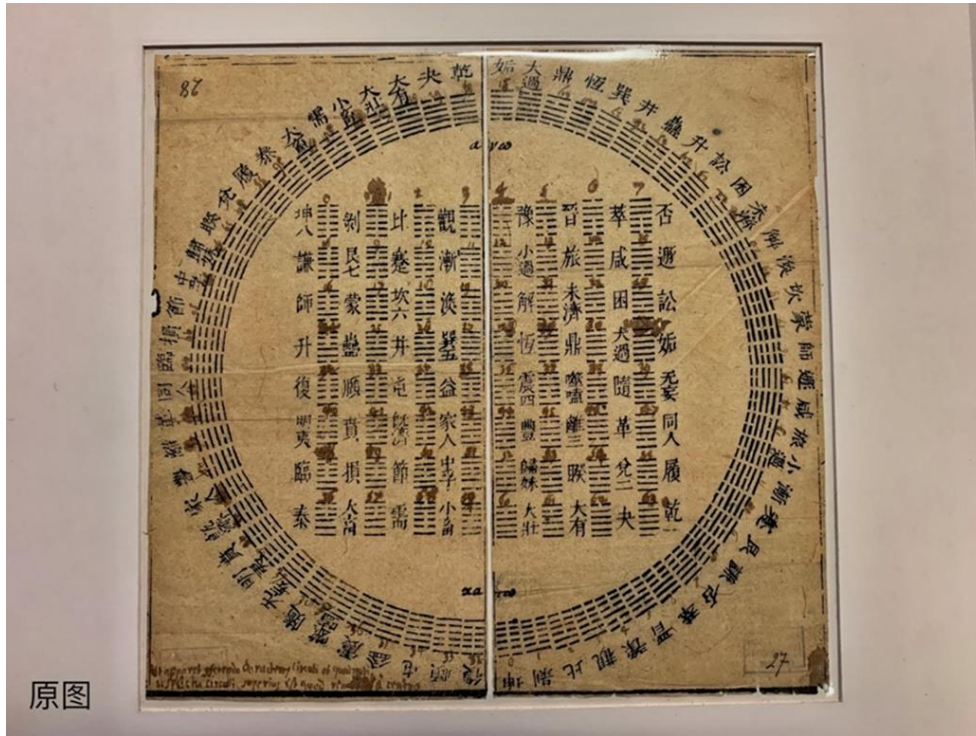
---

<sup>5</sup> 莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716），德意志的著名学者、大哲学家、大数学家，历史上少见的通才，曾被誉为十七世纪的亚里士多德。他和牛顿各自独立地创建了微积分学。其著作多以拉丁文和法文写成。莱布尼茨通过和欧洲许多学者，特别是在中国传教的耶稣会士通讯切磋，对中国事物和观念产生了浓厚的兴趣。

<sup>6</sup> 白晋（Joachim Bouvet, 1656—1730），生于法国勒芒市。1678 入耶稣会学校就读，接受了神学、语言学、哲学、自然科学等的全面教育，对天文、数学和物理学尤其兴趣浓厚。1686 年被法皇路易十四选派为第一批六名来华耶稣会士之一，于 1688 年抵达北京。他们向清廷进献了许多科学仪器和图籍。长期有系统地向康熙皇帝讲授天文学、几何学和算术。白晋的满文讲稿整理成册并译成汉文，由康熙亲自审定作序（其中如满文本《几何原本》，为故宫博物院所藏，汉文本则收入了《数理精蕴》）。作为亲善大使，白晋直接沟通路易十四和康熙两位君主，并深受器重。白晋曾把他的切近观察写成《康熙大帝传》，对欧洲人了解中华产生了影响。他在易经探究上同康熙的切磋尤其频繁。白晋曾在返回巴黎期间以《易经》为题目作了学术报告（1697），在演讲中他把《易经》看做可以同柏拉图、亚里士多德齐驾并驱的合理、完美的哲学体系。通过和莱布尼茨的通信往返切磋，白晋对二进制的开创有着（间接的）历史性贡献。

雍正八年白晋卒于北京（1730，享年 74 岁），遗体安葬在正福寺墓地（墓碑现存于北京北郊五塔寺的古碑博物馆）。

《伏羲六十四卦方位图》），并极快完成了八个三爻卦和所有六十四个易卦的二进制算法的排序编号。（图6）



（图6）

图6是莱布尼兹所见到的“邵雍-白晋图”，由耶稣会士白晋随信寄给他的原图（作者摄于汉诺威的德国国立莱布尼茨档案馆）。白晋1688年进入中国传教，并成为康熙皇帝的科学老师和顾问，是沟通康熙和路易十四的使节。该信1701年11月4日写于北京，估计在1702年秋天抵达德国的汉诺威，但直到1703年4月1日方才为莱布尼茨读到。阅图后莱氏大喜过望，因为图中的易卦排列明显地展现出其所蕴涵的数理结构与自己专研了二十余年的二进制算法是如出一辙的。莱布尼茨于次日立即回复，详细记录了白晋有关这两个系统具有同一性的发见和自己的一些思考。并于5月5日寄出他受到此图启发后修改完成的里程碑意义的论文，得已于同年发表于法兰西皇家学院的学刊上。<sup>7</sup> 该论文的初稿曾在两年前投稿法兰西皇家学院，因为缺乏应用的实例和历史依据，被质疑其可用性而遭搁置。白晋提供的图和解说被莱氏引为应用佐证，有力地推助他完成并成功发表了科学史上具有里程碑意义的创举。

<sup>7</sup> The full title of Leibniz's article (1703) is translated into English as the "Explanation of the Binary Arithmetic, which uses only the characters 1 and 0, with some remarks on its usefulness, and on the light it throws on the ancient Chinese figures of Fu Xi (伏羲)". Leibniz's system uses 0 and 1, like the modern binary numeral system.

请注意原图里仅有的几个汉文数字：在方图的主轴线（左上-右下）上的乾一、兑二、离三、震四、巽五、坎六、艮七、坤八。其他的（阿拉伯）数目字均由莱布尼兹添加的，和我们通常看到的“伏羲先天图”里全无数字不同，莱氏手写的这些易卦排序的数目字对于深入理解易卦的整体结构和相对排序，有着关键的意义。

在白晋提供的伏羲先天图的启发下，莱布尼兹从易卦的卦象结构得出了二进制的排序号，为之很是惊喜。在致白晋的回信中他写道，“我发现二进制数是二十年前。到了今天我才发现……中国人在四千年前，已经了解到0与1的多元数学了。”他1703年发表的那篇划时代论文的题目，译完整了是“二进制算术的解释——只用0-1符号，兼及它的一些应用，以及对古代中国伏羲图像的破解”。足见莱布尼茨在二进制的思考和创造过程中，和邵雍-白晋图的卦象排列的确是息息相通的。

那么，莱布尼兹是怎样用他首创的二进制算法来得到易卦的排序编号的呢？同“加一倍法”一般无二，他以阳爻  $\text{—}$  为1，阴爻  $\text{--}$  为0，逐爻加倍来算出的。最简单的如，坤卦  $\text{☷}$  的二进制编码是000000，排序则为0（ $0*2^0+0*2^1+0*2^2+0*2^3+0*2^4+0*2^5=0$ ）；乾卦  $\text{☰}$  的二进制编码为111111，排序则是63（ $1*2^0+1*2^1+1*2^2+1*2^3+1*2^4+1*2^5=63$ ）。

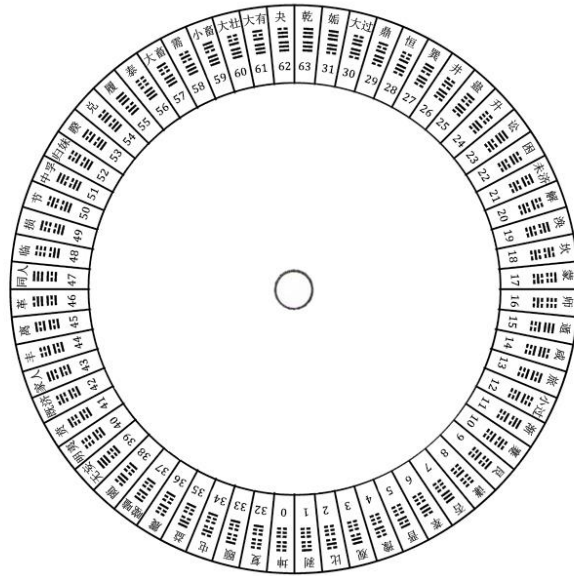
然而，（卦象上下不对称的）既济卦  $\text{☵☲}$  的二进制编码究竟如何，是101010，还是010101？其排序又该是多少呢？如果是前者的话，它的排序为21；而若是后者的话，既济个排序则成了42（ $0*2^0+1*2^1+0*2^2+1*2^3+0*2^4+1*2^5=42$ ）。这相当于怎么来看待既济的卦象，从而转换成它的二进制编码。若是把卦象顺时针转90度，相当于自上而下地看待卦象，既济卦的二进制编码就是101010。而把既济的卦象逆时针转90度来看的话，它的二进制编码则是010101，结果它的排序就应当是21（恰好是它的综卦——未济的排序）！

我们很容易就可以验证，图6里莱布尼茨给出的水上雷下的屯卦  $\text{☳☵}$  的二进制编码为100010，排序为34；蒙卦  $\text{☵☶}$  的二进制编码则为010001，排序则为17。但是，要是卦象是从下至上进位，即将卦象逆时针转90度来看的话，两卦的排序分别是17和34。同理，卦象的阴阳爻结构是自下而上进位的话，否卦  $\text{☷☷}$ （111000）和泰卦  $\text{☰☷}$ （000111）的排序应当是为56和7，而不是莱布尼茨排定的7和56。

如所周知，易学的牢固规范，卦象须是自下而上来看的，即以最高的上爻（六爻位）为首爻，以最低的初爻（一爻位）为尾爻。易经易传及各家对此的认知和诠释可说是罕有例外的。因此，排序号理当是自下而上来加倍进位的。从而得到的应当是数值排序，排为同一序号的卦象，其实是邵雍-莱氏排序的综卦。（见下文）

结果请见下图7。圆图（图7A）所列出的卦象是从圆心向外看，从而定出各自的二进制排序的。从坤卦0、剥卦1、比卦2、……到姤卦31逆时针排成圆图的右半圈，然

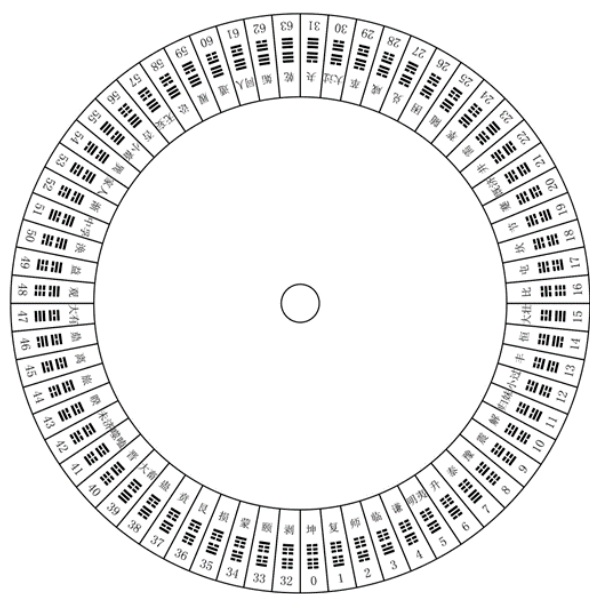
后从复卦 32、颐卦 33、屯卦 33……直至乾卦 63 是顺时针排成圆图的左半圈。这是 “两仪相逆” 排列的结果。<sup>8</sup>



(图 7A)

如果是从圆周向内朝圆心来看待所列的卦象，见图 7B，那么是坤 0、复 1、师 2、临 3……夬 31 逆时针排成圆图的右半圈，然后从剥卦 32、颐卦 33、蒙卦 34……直至乾卦 63 是顺时针排成圆图的左半圈。

<sup>8</sup> 表明莱氏在用二进制算法替易卦排序时已深谙“两仪相逆”之理。请见图 6 里的两个页码标注，27、28 两个铅笔字迹是彼此倒着写的。汉诺威的莱氏档案馆的专家告诉作者说，它们是十八世纪晚期才由档案专家添加上去的。作者因此猜想，当年莱布尼茨在替伏羲-白晋图排卦序时，是倒过来看图的，即以 28 页为正，27 页则是倒过来看的。莱氏不识汉字，因此并无多大的困扰。



(图 7B)



非常有意思，无论是图 7A 还是图 7B，经过圆心的直径连线连接的两卦成为一对，其排序之和必为 63（即为错卦对）。这样构成的 32 对卦里，只有 8 对（坤-乾、小过-中孚、坎-离、大过-颐，以及否-泰、渐-归妹、未济-既济、蛊-随），在周易里原来就成对卦，其余的 24 对卦都不是。想一想，为什么会是这样的呢？

由此构成的两种卦序，我们不妨称其为邵雍-莱氏排序和数值排序，两者的异同在八卦序可以看得更为简单明了。

莱布尼茨对八个单卦（三爻）的排序：地 0-山 1-水 2-风 3-雷 4-火 5-泽 6-天 7，与邵雍-白晋方图里的排序（汉文数目字）正相逆，而两种排序的相对位置则是相同的。要是莱氏以阴爻--为 1、阳爻—为 0 的话，那么是地 7-山 6-水 5-风 4-雷 3-火 2-泽 1-天 0，排出的八卦序就几乎和邵雍排序完全一样。对于生活在欧陆文明的人，单一起源的宇宙观，犹太-基督教的单一神主宰的范式是非常强韧有力的。莱布尼茨因而只能选择以阳爻（有）—为 1，单一神所主宰的宇宙最高的善及秩序；而以阴爻（无）--为 0，表示混乱、涣散、虚无、不完善、甚至邪恶。况且，天排为 7，同西方固有的价值信仰并无出入，因为 7 在他们是“圣数”，第七天是“主日”。

莱布尼茨未能深入发掘邵雍-白晋图所蕴涵的奥义，这很可惜，他本来有很好的机会谋求突破，来解答易经里不少“元问题”的。作者推想，这是莱氏做出的一个“妥协”所致，有违 0-1 二进制算法的规范，令他踌躇，因而没再作进一步的推进。

那么在莱氏排序里，山卦的排序为 1 又是如何算出来的呢？（见图 8）

山卦☶的二进制编码是 100，还是 001 呢？莱布尼茨将山卦排序为 1，他显然是把卦象顺时针转了 90 度 ，来计算得到的。如果将山卦的卦象逆时针旋转 90 度的话 ，它的二进制编码当为 100，由二进制算法得到的排序应该是 4。问题是，依据易经的通则，卦象须是自下往上看待，山卦的初爻为阴、二爻为阴、上爻为阳，所以按照规范的二进制算法，编码为 100，而排序应当是 4。排序为 1 的当为雷卦☳，其二进制编码才是 001。同理，邵雍-莱氏排序为 3 的风卦和 6 的泽卦，在数值排序里其实应当为泽 3 和风 6。换言之，八卦中倒有一半排序出了问题。地、天、水、火四卦由于卦象上下对称，卦象顺时针还是逆时针转 90 度无妨，它们的二进制编码不变，在两种排序等同，始终是 0、7、2、5。<sup>9</sup>

莱布尼茨做此妥协，是很容易理解的。莱氏不只不谙熟易经的定则，他甚至不会读最基础的汉文。不过这样一来，他也少了一点困扰。

	000	0	0
	001	1	1
	010	10	2
	011	11	3
	100	100	4
	101	101	5
	110	110	6
	111	111	7

(图 8)

上面的图摘自莱布尼茨于 1703 年发表于法国皇家学会学刊的二进制算法的论文，该论文在科学史上具有里程碑的意义。其中莱氏替被他称作二进制算法源头的中国远古圣贤伏羲氏的智慧的八卦排序的列表。莱氏对他所（必需）做的“妥协”其实也是心存疑问的，他在复信（1703-5-18）中也谈论到这个问题，但始终没能得到白晋的回答。事实上，白晋从北京发送给莱布尼茨的最后一封信写于 1702-11-8，（与莱氏的复信交错而过，）之后再无音讯。尽管莱氏又给北京的白晋去过四封信敦促，分别于 1704-7-28、1705-8-18、1706 五月、1707-12-3 寄出。显然，莱布尼茨期待两人的切磋能够继续。

这个妥协带来的问题自然蔓延到全部的六十四个易卦。譬如，否卦 111000，排序应当是顺时针转来看卦象的 7（邵雍-莱氏排序），还是逆时针转卦象的 56（数值排序）呢？

邵雍排序	0	4	2	1	6	5	3	7
顺时针 90 度								
二进制编码	000	100	010	001	110	101	011	111
二进制编码	000	001	010	100	011	101	110	111
逆时针 90 度								
数值排序	0	1	2	3	4	5	6	7

9

相反，与否卦成对（既是综卦同时也是错卦）的泰卦，排序究竟当为 7 还是 56？否极泰来还是泰极否来，出入重大，可容不得搞混！

这个困扰的肇因不仅仅是单纯的算法技术问题，背后有着文化和观念的深厚积淀。

令人惆怅的是，莱布尼茨和白晋通讯的意外中绝，阻碍了两人极有意义的交流，也因此断了两人继续深入挖掘的可能。但是谁又想得到，这个困扰的问题竟得拖延三百余年，要到今天才来解答呢？作者将在别处，以“易卦的错综复杂关系”、“易学的现代诠释”、“易卦结构和二进制的关系”等等为专题，展开深入的辨析。

## 附录二 大衍筮法辨析

大衍筮法又称揲蓍法、蓍占，或直接称作周易占法，是载入周易原文的唯一筮法。历朝历代的易学家们口授心传的依据，是《易传·系辞》里的一段话，“大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扚以象闰，五岁再闰故再扚而后挂。（原文见“大衍之数五十”章及原注）。”<sup>10</sup>

筮占的筮，从竹从巫，“竹”代表草木，“巫”代表占卜，即筮是用植物来做的预测，而卜则是用动物做的预测。蓍占以蓍草为工具来指导人们的“风险决策”，而卜则以龟甲、兽骨作为工具。《说文》有曰，“筮，易卦用蓍也”，反映了西周时代就很流行的蓍筮文化。蓍占在早期是和龟卜并重的。周易的大衍筮法得到重视，被广泛流传和使用，与孔子及其门人作易传并推崇蓍占有很大的关系，龟卜的方法则渐渐失传了。

筮占所用的道具是蓍草，一种长于西伯利亚和中国北方的多年生直立蒿类植物。例如，河南的太昊陵有蓍草园，但蓍草只生于那个园地的说法并不确实。筮占是用 50 茎经过香薰的、长约尺许的干蓍草来进行的占卜，因其方法基于“大衍之数”，故又被称为“大衍筮法”。本质上，筮占是以蓍草为算筹，借“植物灵性”来“沟通天意”的方法。（图 9）



（图 9）

大衍筮法就其实质而言，是一种四象筮法，随机得到四个筮数，六（6）、七（7）、八（8）、九（9）。同属阴仪的 6 为可变而 8 为不可变；同属阳仪，9 为可变而为不可变。所谓“可变”，有待变之意，阴阳彼此转换——6 待变为 7，而 9 待变为 8。

<sup>10</sup> 《易传·系辞》“大衍之数五十”章：“大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扚以象闰，五岁再闰故再扚而后挂。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十。凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。乾之策二百一十有六，坤之策百四十有四，凡三百有六十，当期之日。二篇之策万有一千五百二十，当万物之数也。是故四营而成易，十有八变而成卦，八卦而小成，引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣”。

实质上，大衍筮法的过程是一个“随机数发生器”。问题在于，得到6、7、8、9四个筮数的随机概率分别是多少呢？下文通过分析推导得出结论，同为阴仪，得到6的概率是1/16，得到8的概率则为7/16；同为阳仪，得到9和7的概率则分别是3/16和5/16。

11

大衍筮法产生的随机结果，若不加细辨的话，很容易误以为得到这四个筮数的几率是相等的，均为1/4。或者注意到了大衍筮法生成一爻需经过“三变”，三个阶段的组合之后，得到6、7、8、9四个数的概率分别是八分之1、3、3、1。虽说这几种替代大衍筮法的简化办法，得到阴爻和阳爻（可变+不可变的）的概率，都还是各半（1/2），但是其间生成概率的微妙变化，可以导致非常悬殊的结果。

厘清大衍筮法获得6、7、8、9这四个筮数的（随机）准确概率，非常之有必要。毕竟，奠基于经传里的卦辞、象辞、爻辞，以及各家的诠释，所依据的都是大衍筮法的著占结果。<sup>12</sup>不严格按照大衍筮法生成易卦的概率，对易卦的诠释会造成大偏误。由其他方法，包括各种变通的简化方法得到的概率，如果不做相应的调整，很可能形同缘木求鱼，导致谬以千里的解卦结论和估测判断。

历来对大衍筮法产生的随机结果有种种偏误的理解并不奇怪，因为大衍筮法的筮占过程，庄严繁琐，不只令现代人感到茫然，古人必也觉得很难。朱熹不愧为不世出的大学者，依凭执着精细的研析，他暗示出得到六、七、八、九四个筮数的概率是很不平衡的，即他所说“可变之爻常少而不可变之爻常多”的道理。<sup>13</sup>

---

<sup>11</sup> “大衍之数，其算法之原乎！是以算数之起，不过乎方圆曲直也。乘数，生数也；除数，消数也。算法虽多，不出乎此矣。”——邵雍

<sup>12</sup> 诸多占卦预测的方法里，大衍筮法始终占据着主导地位。《左传》、《国语》中记载的二十多则先秦筮案均为大衍筮案。后世以预测精确著称的官辂、郭璞等古人所用的无不是大衍筮法，北宋的陈搏和邵雍用的也都是大衍筮法。近代如易学大家尚秉和先生的《筮案辑存》，数十则案例无一不是大衍筮案。

<sup>13</sup> 朱熹曰，“六爻不动，占本卦象辞。”

他又认为，“有天地自然之易，有伏羲之易，有文王、周公之易，有孔子之易。自伏羲以上皆无文字，只有图书最宜深玩。可见作易本原精微之意。文王以下，方有文字，即今之《周易》。然读者亦宜各就本文消息，不可便以孔子之说为文王之说也。”（见《周易本义》）

而弄明白“伏羲卦象”要比读懂《周易》通行文本重要。他说：“必欲知圣人作易之本，则当考伏羲之画；若只欲知今易书文义，则但求之文王之经、孔子之传足矣。两者初不相妨，而亦不可以相杂。”

在其名著《周易本义》的卷首“筮仪”篇中，朱熹对大衍筮法的过程有相当详尽的描述和注解。他说，四个筮数的概率之所以不平衡，是因为大衍筮法过程的端始，“取其一策，反于橛中”——“但用四十九蓍耳”，即大衍之数 50，用的是 49 根蓍草的缘故。<sup>14</sup>

大衍筮法的随机数发生过程，说白了，是在大衍之数的 50 茎蓍草里先取出 1 茎不用（“存体”）之后，把“致用”的 49 茎蓍草分作两群（“分二”分作两大刻）；再拿走 1 茎（“挂一”）；然后按“扚”（“揲四”，即以 4 茎为一簇）；取走核定的余数（“归奇”）。经过这“四营”成一“变”，凡三变成一爻。<sup>15</sup>

第一变，“挂一”之后，随机分成的两刻的蓍草剩下 48 茎。从每一群蓍草里分别取走 4 茎的整倍数后，再剔除其余数——或 1 或 2 或 3 或 4 茎，剩下了 44 茎或 40 茎。在第二变“挂一”之后，分别成了 43 茎或 39 茎。“归奇”即剔除余数（3 或 7）后，从 43 茎剩下的是 40 茎或 36 茎，概率各半；从 39 茎则剩下 36 茎或 32 茎，概率也是相等的。然后是第三变，“挂一”之后则成了 39 茎、35 茎、或 31 茎。“归奇”即剔除余数（3 或 7）后，从 39 茎剩下 36 茎或 32 茎，从 35 茎剩下 32 茎或 28 茎，从 31 茎则剩下 28 茎或 24 茎，概率也是各占其半。以朱熹的话来讲，是“奇耦各得四之二焉”。（ $3=1+2$  或  $2+1$ ； $7=3+4$  或  $4+3$ ，在四种可能性里各占了两种。）

然而其中的奥妙，是第一变所得到的“奇耦”，是否也“各得四之二焉”呢？非也。其关键就在于“但用四十九蓍耳”。

上文说到了，49 茎蓍草在第一变的“挂一”之后剩下 48 茎，请注意 48 是 4 的整倍数。<sup>16</sup>“两大刻”的余数（1 或 2 或 3 或 4）之和被剔除后，剩下 44 茎或 40 茎。但须注意，得到 44 茎的概率是四分之三，而得到 40 茎的概率只有四分之一。也就是朱熹解释的，“奇者三而耦者一也”。因为其中的一刻，若余数为 1、2 或 3，那么另一刻的余数就是 3、2 或 1，被剔除的余数之和为  $4 = 1+3$ 、 $2+2$ 、或者  $3+1$ ，故剩下 44 茎者（ $48 - 4$ ）四居其三；要

---

<sup>14</sup> 大衍筮法用 49 根蓍草，因此变化非常丰富奇谲。设若“取其二策，反于橛中”，用的是 48 根蓍草的话，变化就要简单得多，在那种情况下，6、7、8、9 四个数的概率才是 1:3:3:1。

<sup>15</sup> 大衍之数何以是五十，它是不是一种进位制（base-50），还一直没有定论。或许是两手十指和一手五指之乘积，便于“手算”？不过有“小衍之数”为五的说法，洛书数之和为四十五、河图数之和为五十五，洛书加一“小衍之数”，河图减一“小衍之数”，恰好是“大衍之数”。例如，邵雍就认为，“五十者，蓍数也。六十者，卦数也。五者，蓍之小衍也。故五十为大衍也。八者，卦之小成，则六十四为大成也。”（《观物外篇上》·河图天地全数第一）

<sup>16</sup> “揲其全策为十二者四，除挂一，数止四十八。以八卦六爻当之，以每位八卦配之，皆四十八。则蓍之用适与卦合，总为十二而四因之耳。”（《观物外篇上》·河图天地全数第一）

是某一刻的余数是 4 的话，那么另一刻的余数必为 4，故被剔除的余数之和是  $8 = 4+4$ ，所以剩下 40 茎者（ $48 - 8$ ），四居其一而已。

三变之后所剩下的 24 茎、28 茎、32 茎、36 茎著草的 4 的整倍数，就是 6、7、8、9（拗数）。所以，得到 6、7、8、9 的概率分别为  $1/16$ 、 $5/16$ 、 $7/16$ 、 $3/16$ ，其中得到 7 的概率是  $5/16 = 1/16 + 1/16 + 3/16$ ；得到 8 的概率是  $7/16 = 1/16 + 3/16 + 3/16$ 。

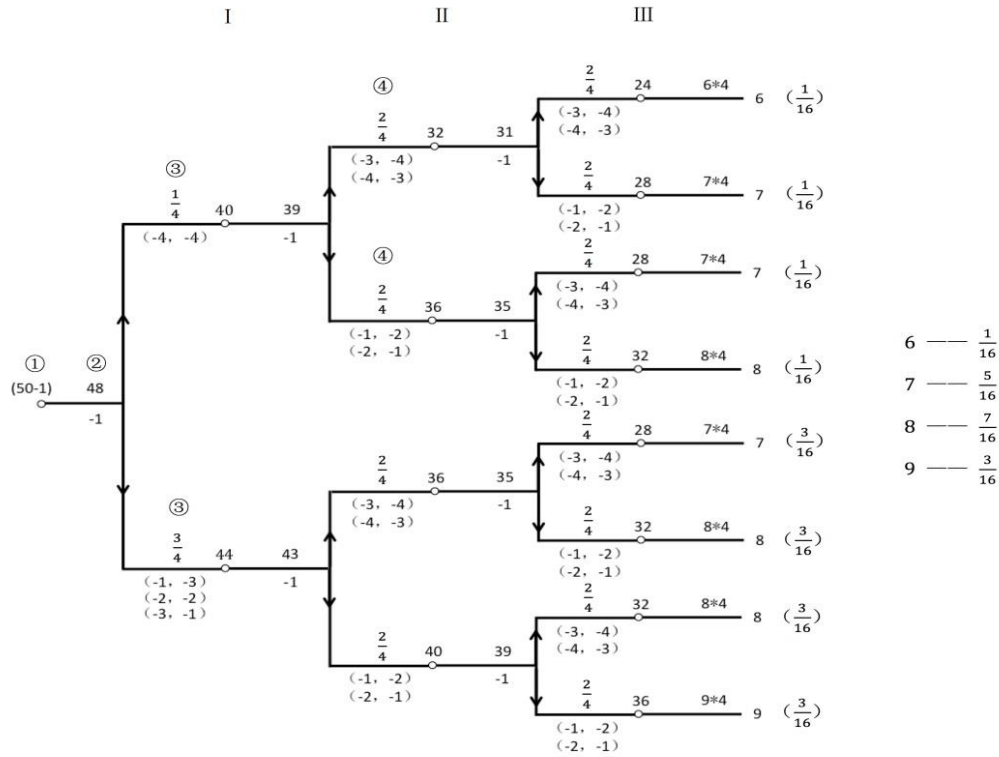
第一变在概率上的变化，导致了 6、7、8、9 的随机结果的比例是 1:5:7:3，而非 4:4:4:4。同样的，2:6:6:2 也不准确。<sup>17</sup> 这个道理，用概率分析的工具“决策树”（三个阶段）来描述筮仪的过程，应能一目了然。（见图 10）

<sup>17</sup> 设若“存体”的著草茎数不是 1，而是 2 的话，那么产生 6,7,8,9 这四个随机数的概率分布将为八分之 1:3:3:1。这个概率分布是（自唐代以来）民间所习用的“摇钱筮法”等简化方法产生的结果。作者把各个可能的“存体”数为初始值的大衍筮法的结果列表如下。读者不难验证这些结果。

让我们来作假设：1.“存二”（50 策著草里先取出 2 策不用），得到四个筮数的概率是多少？ 2.“存 0”，即从 50 策著草先取出 0 策不用的话，又有怎样的结果呢？ 3.“存三”，即从 50 策著草先取出 3 策不用的话，则又如何？结果如下表所列：

		可变之 阴爻	不可变 之阳爻	不可变 之阴爻	可变之 阳爻
	存体	6	7	8	9
0	四分之一	0	1	2	1
1	十六分之一	1	5	7	3
2	八分之一	1	3	3	1
3	十六分之一	3	7	5	1
4	四分之一	1	2	1	0

## 三阶段决策树



(图 10)

注解:

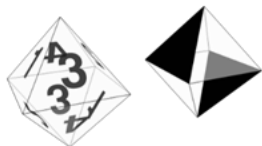
- ① “存体” (50 茎著草里先取出 1 茎不用)。
  - ② “挂一” (再拿走 1 茎) 后把 “致用” 的 48 茎著草分作两群 (“分二”)。
  - ③ 按 “拗” (“揲四” 即以 4 茎为一簇), 取走核定的余数 (“归奇”)。此第一变 (I), 余下 40 茎的概率为四分之一, 余下 44 茎的概率则为四分之三。
  - ④ 重复②、③成第二变 (II)。“挂一”和“归奇”之后, 分别剩下 43 茎或 39 茎。即剔除余数 (3 或 7) 后, 从 43 茎剩下的是 40 茎或 36 茎, 概率各半, 从 39 茎剩下的是 32 茎或 36 茎, 概率也是各半。再重复②③④成第三变 (III), 则剩下 24、36、28、32 茎, 概率分别为十六分之一、十六分之三、十六分之一 (或三)、十六分之三 (或一)。
- 结果是, 得到 6、7、8、9 (四的整除数) 的概率, 归并起来, 分别为  $\frac{1}{16}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{7}{16}$  和  $\frac{3}{16}$ 。

不过，要做出一个简单的随机发生器来精确模拟“大衍筮法”的概率却有点复杂。由于世界上不存在正十六面体，无从设计出一个简单的“骰子”来随机地获得  $1/16$ 、 $3/16$ 、 $5/16$  和  $7/16$  的概率分布。<sup>18</sup> 作为替代，作者建议的办法，是抛掷两枚正八面体的骰子（见图 2，由作者设计并制作），从而得到二爻结构的四象（四个筮数）之一。抛掷三次，分别代表地（初爻、二爻）、人（三爻、四爻）和天（五爻、上爻），于是便生成了一个六爻易卦。

如此占得的易卦符合大衍筮法的成卦概率。由此得到的易卦，联系易经、易传的文辞诠释，其所传递的“天意”方有可能得到精准的诠释而不失之偏误。

---

<sup>18</sup> 作者为此已设计了一对正八面体的“骰子”来完成大衍筮法的占卦功能。



## 主要参考文献书目

- 冯友兰 中国哲学简史[插图珍藏本], 新世界出版社, 2004 (赵复三翻译)
- 黄宗羲 (明) 易学象数论, 九州出版社, 2007
- 焦循 (清) 易学三书, 九州出版社, 2010
- 柯兰霓 (德) 耶稣会士白晋的生平与著作, 李岩译 大象出版社, 2009
- 来知德 (明) 周易集注(上、下)(易经来注图解), 九州出版社, 2004
- 李光地 (清) 御纂周易折中. 康熙五十四年武英殿刻本
- 李零 中国方术正考, 中华书局, 2006
- 李零 周易的自然哲学, 三联书店, 2013
- 李申 郭彧 周易图说总汇, 华东师范大学出版社, 2004
- 尚秉和 尚秉和易学全书, 中华书局, 2020
- 邵雍 (宋) 皇极经世书, 中州古籍出版社, 2007
- 孙涤 易卦解构——易卦结构解析 24 讲 上海人民出版社 2016
- 孙涤 解析大衍筮法及易卦的著占概率, 《文史哲》2018 年第一期, 第 47-59 页
- 孙涤 论易经和二进制算法的关系, 工作论文, 2019
- 孙涤 从朱熹的卦变图看易卦的排序及变化, 工作论文, 2018
- 孙涤 易经和二进制算法关系探索——走访莱布尼茨档案馆侧记, 2020
- 孙涤 易卦正解——重释易经的新视角, 上海人民出版社, 2021
- 张行成 (宋) 皇极经世索隐, 台湾商务印书馆, 1969
- 张政烺 张政烺论易丛稿, 中华书局, 2010
- 朱伯崑 易学哲学史, 北京大学出版社, 1986
- 朱熹 (宋) 周易本义, 北京大学出版社, 1992

Bouvet, P. Joachim Portrait historique de l'empereur de la Chine (Paris, 1697)

- Chan, Albert Chinese Books and Documents in the Jesuit Archives in Rome, M. E. Sharpe, 2002
- Ifrah, Georges The Universal History of Numbers, John Wiley & Sons, 2000
- Jung, Carl Foreword to the I Ching, Collected works, 1950.
- Leibniz G. W. Explanation of the Binary Arithmetic, which uses only the characters 1 and 0, with some remarks on its usefulness, and on the light, it throws on the ancient Chinese figures of Fu Xi (伏羲) (1703) published in the Memoires de l'Academie Royale des Sciences. Die mathematische schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz, vol. VII, C. I. Gerhardt (ed.), p 223, Translated from the French. Leibniz-Bouvet Correspondence, translation and Annotations by Alan Berkowitz and Daniel J. Cook <https://leibniz-bouvet.swarthmore.edu/letters/>
- Mungello, D.E. Leibniz and Confucianism—the Search for Accord, Honolulu 1977
- Mungello, D.E. The Great Encounter of China and the West, 1500–1800, 4th Edition, Rowman & Littlefield Publishers, 2012
- Needham, Joseph Science and Civilisation in China, Vol.2 History of Scientific Thought, Cambridge University Press, 1956
- Needham, Joseph Science and Civilisation in China, Vol.3 Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth, Cambridge University Press, 1959
- Perkins, Franklin Leibniz and China—— A Commerce of Light, Cambridge University Press, 2004
- Seife, Charles Zero ——The Biography of a Dangerous Idea, Penguin, 2000
- Slingerland, E. Trying Not to Try: Ancient China, Modern Science, and the Power of Spontaneity, Crown, 2014
- Weyl, Hermann Symmetry, Princeton University Press, 2016
- Wilhelm, Hellmut Heaven, Earth, and Man in the Book of Changes, UBS Publishers' Distributors, 1979
- Widmaier, Rita & Malte-Ludolf Babin GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, Der Briefwechsel mit den Jesuiten in China (1689 – 1714) FELIX MEINER VERLAG, HAMBURG 2006
- Wilhelm, Richard The I Ching, Baynes C F. trans. Princeton University Press, 1967
- Wilczek, Frank A Beautiful Question. Penguin Books, 2015